



دبیرستان پسرانه غیر دولتی ابتکار علم - دوره دوم

نام دبیر : محمد کرمی

موضوع امتحان : هندسه ۳

کلاس :

نام و نام خانوادگی :

۰/۵	۱ صحیح یا غلط بودن هریک از جملات زیر را مشخص کنید.	
	الف در حالت کلی حاصل ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد. ع	
	ب اگر A یک ماتریس 3×3 و $ A = 2$ باشد آن‌گاه $ 2A = 16$ است. ص	
۱/۵	۲ جاهای خالی را با اعداد یا عبارات مناسب کامل کنید.	
	الف مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، آن زاویه است. نیست	
	ب در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ m & -1 \end{bmatrix}$ مقدار m برابر است.	
	پ اگر $A = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس A برابر است. -1	
	اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس $A - 2I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است).	
۱/۵	$A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	۳
	$ A - 2I = 2 - 0 = 2$	
	$(A - 2I)^{-1} = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
	اگر دو ماتریس مربعی A و B به صورت $A = [3i - 2j]_{3 \times 3}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشند:	
	الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.	
۲	ب) ماتریس B^2 را محاسبه کنید.	۴
	الف) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$	
	ب) $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -3 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$	

مقدار m را طوری بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx + 9y = m + 1 \\ 4x + my = -4 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \rightarrow \frac{m}{4} = \frac{9}{m} \neq \frac{m+1}{-4}$$

$$m^2 = 36 \rightarrow \begin{cases} m = +6 \checkmark & \frac{6}{4} = \frac{9}{6} \neq \frac{7}{-4} \\ m = -6 \checkmark & \frac{-6}{4} = \frac{9}{-6} \neq \frac{-5}{-4} \end{cases}$$

۱/۵

۵

دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ در نظر بگیرید.

الف) آیا جمع دو ماتریس A و B تعریف می‌شود؟ چرا؟ خیر، چون مرتبه برابری ندارند
ب) حاصل $|A \times B|$ را به دست آورید.

$$A \times B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & -4 \\ -8 & 11 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A \times B| = -3(-3 \cdot 4 + 8) - 4(2 \cdot 2 - 3 \cdot 2) - 2(-4 \cdot 2 + 8) = 0$$

۲

۶

اگر $3A = \begin{bmatrix} |A| & -5 \\ 1 & 4|A| \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A^{-1}|$ را محاسبه کنید.

$$|3A| = 3|A| \rightarrow 9|A| = 3|A|^2 + 5 \rightarrow 3|A|^2 - 9|A| + 5 = 0$$

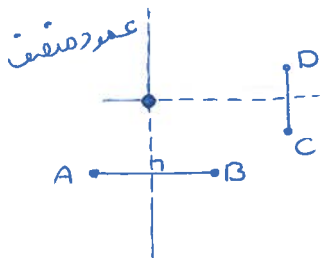
$$t = 1 \rightarrow |A| = 1 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = 1$$

$$t = \frac{5}{3} \rightarrow |A| = \frac{5}{3} \rightarrow |A^{-1}| = \frac{3}{5}$$

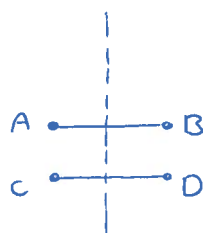
۱/۵

۷

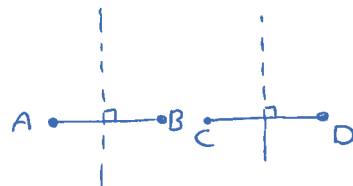
نقاط A, B, C, D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد. (بحث کنید)



یک جواب



بی‌سما جواب



صفر جواب

۱/۵

۸

معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x + 3y = -5$ بر آن مماس باشد.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \rightarrow 2x=4 \rightarrow \boxed{x=2}, \boxed{y=-1} \quad O(2, -1)$$

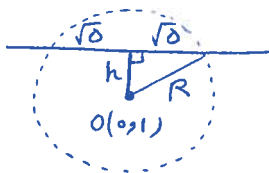
$$R = \frac{|1 - 3 + \Delta|}{\sqrt{14 + 9}} = \frac{1 \cdot 0}{\Delta} = 2$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

۱/۵

۹

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0, 1)$ بوده و روی خط $3x + 4y + 6 = 0$ وترتی به طول $2\sqrt{5}$ جدا کند.



$$h = \frac{|0 + 4 + 6|}{\sqrt{9 + 16}} = 2$$

$$R^2 = 2^2 + (\sqrt{5})^2 \rightarrow R^2 = 9 \rightarrow R = 3$$

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

۱/۵

۱۰

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(2, -2)$ بوده و بر دایره به معادله $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$ مماس خارج باشد.

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4 + 4 + 1 \rightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

$$O'(-1, 2), R' = 3$$

$$d = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$d = R + R' \rightarrow 5 = R + 3 \rightarrow \boxed{R = 2}$$

$$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

۲

۱۱

وضعیت دو دایره به معادلات $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 6 = 0$ را نسبت به هم تعیین کنید.

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 1 + 4 + 1 \quad O(1, -2) \quad R=1$$

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 = 14 \rightarrow O'(-3, -1) \quad R'=K$$

$$d = \sqrt{(1 - (-3))^2 + (-2 - (-1))^2} = \sqrt{14 + 1} = \sqrt{15}$$

$\sqrt{15}$

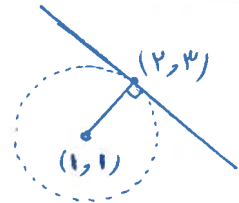
(مقاطع هستند)

۱/۵

۱۲

در نقطه $A(2, 3)$ روی دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.

$$\text{نسبت شیب} = \frac{3-1}{2-1} = 2 \xrightarrow{\text{قرینه‌گیری}} m = -\frac{1}{2} \quad O(1, 1)$$



$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$$

۱/۵

۱۳

۲۰

موفق باشید