



دبیرستان پسرانه غیر دولتی ابتکار علم - دوره دوم

نام و نام خانوادگی: کلاس: موضوع امتحان: ریاضیات گسسته نام دبیر: محمد کرمی

۱	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) حاصل ضرب هر عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. غ ب) برای اعداد صحیح a, b و c که $a \neq 0$ ، اگر $a b + c$ آن‌گاه $a b$ یا $a c$. غ ج) معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, m) b$. ص د) اگر داشته باشیم $(a, b) = 1$ آن‌گاه می‌گوییم a و b نسبت به هم اول‌اند. ص	۱
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف) گرافی را که بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، گراف می‌گوییم. همبند ب) تعداد رئوس فرد هر گراف عددی است. زوج ج) مینیمم درجه در گراف کامل از مرتبه p برابر است. $p - 1$ د) گرافی را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشد، گراف می‌گوییم. $k -$ منتظم	۲
۱/۵	ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج $n, n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است. $n = 2k \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2q + 1$	۳
۱/۵	اگر عددی مانند k در Z باشد به طوری که $7 2k + 1$ ، ثابت کنید: $49 4k^2 - 10k - 6$ $7 2k + 1 \Rightarrow \begin{cases} 49 4k^2 + 4k + 1 \\ 49 14k + 7 \end{cases} \Rightarrow 49 4k^2 - 10k - 6$	۴
۱/۵	باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 63^{14} + 1$ را بر ۱۶ به دست آورید. $63 \equiv -1 \pmod{16} \Rightarrow 63^{14} \equiv 1 \pmod{16} \Rightarrow A \equiv 2 \pmod{16} \Rightarrow r = 2$	۵
۱/۵	باقی‌مانده تقسیم a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب برابر ۳ و ۴ می‌باشد، باقی‌مانده تقسیم a بر ۲۰ را محاسبه کنید. $\begin{cases} a = 5q_1 + 4 \xrightarrow{\times 4} 4a = 20q_1 + 16 \\ a = 4q_2 + 3 \xrightarrow{\times 5} 5a = 20q_2 + 15 \end{cases} \rightarrow a = 20q' - 1 \Rightarrow a = 20q'' + 19$	۶
۱/۵	معادله هم‌نهشتی $4x \equiv 10 \pmod{6}$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن به دست آورید. $4x \equiv 10 \pmod{6} \Rightarrow 4x \equiv 4 \pmod{6} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow x = 3k + 1$	۷

اگر عدد طبیعی a ، دو عدد $(5k + 9)$ و $(13k + 13)$ را عاد کند، ثابت کنید: $a = 1$ یا $a = 7$.

۱/۵

$$\begin{cases} a|5k + 9 \\ a|13k + 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a|40k + 72 \\ a|40k + 65 \end{cases} \Rightarrow a|7 \Rightarrow a = 1 \vee a = 7$$

۸

اگر $p \neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p, q) = 1$.

برهان خلف: گیریم $(p, q) = d$ و $d \neq 1$ باشد. بنابراین:

۲

$$\begin{cases} d|p \wedge d|q \\ p, q = \text{عدد اول} \end{cases} \xrightarrow{d \neq 1} d = p \wedge d = q \Rightarrow p = q \text{ تناقض}$$

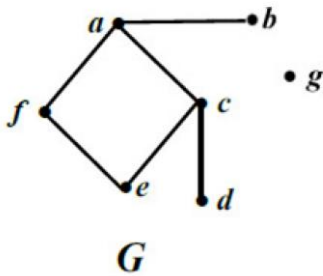
۹

معادله سیاله $5x + 2y = 18$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.

۲

$$2y \stackrel{5}{\equiv} 18 \xrightarrow{(2,5)=1} y \stackrel{5}{\equiv} 9 \stackrel{5}{\equiv} 4 \Rightarrow y = 5k + 4 \Rightarrow 5x + 2(5k + 4) = 18 \\ \Rightarrow x = -2k + 2$$

۱۰



گراف G به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این گراف به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) مرتبه و اندازه آن را بنویسید.

ب) مجموع درجات رئوس این گراف را به دست آورید.

ج) مجموعه $N_G[c]$ را بنویسید.

د) دوری به طول ۴ در این گراف بنویسید.

ه) حاصل عبارت $q(\bar{G}) + \deg_{\bar{G}}(g)$ را به دست آورید.

۲

الف) $p = 7, q = 6$

ب) $2q = 12$

ج) $N_G[c] = \{a, c, d, e\}$

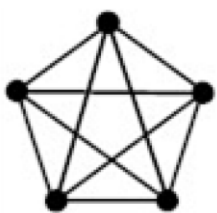
د) $ac e f a$

ه) $q(\bar{G}) + d_{\bar{G}}(g) = 15 + 6 = 21$

۱۱

گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به دست آورید، سپس گراف را رسم کنید.

۱



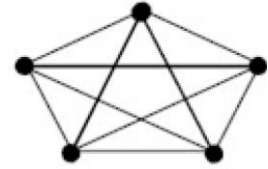
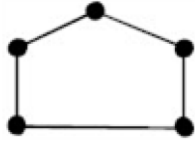
$$\frac{p(p-1)}{2} = 10 \Rightarrow p^2 - p - 20 = 0 \Rightarrow p = 5$$

۱۲

یک گراف ۵ رأسی غیرتهی k - منتظم رسم کنید به طوری که:

الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱



۱۳

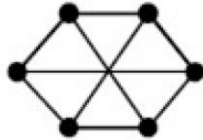
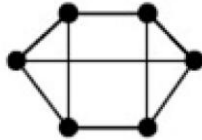
گراف G ، ۶ رأسی ۳- منتظم است.

الف) اندازه گراف G را بیابید.

$$3 \times 6 = 2q \Rightarrow q = 9$$

ب) نمودار گراف G را رسم کنید.

۱



ب) رسم یکی از گراف‌های مقابل کافی است.

۱۴

موفق باشید