



دیرستان پسرانه غیر دولتی ابتکار علم - دوره دوم

نام و نام خانوادگی: کلاس: یازدهم ریاضی موضوع امتحان: حسابان ۱ نام دبیر: آیدین مشروطه چی

$$O = \frac{A+B}{2} = \frac{1^0 + 1^1}{2} = \frac{1-2}{2} = 1-1$$

۱- در جاهای خالی، پاسخ مناسب بنویسید. (۲ نمره)

الف) $A = (0, 6)$ و $B = (8, -8)$ مختصات دو سر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز دایره است.

ب) اگر نمودار $f(x)$ را رسم نماییم، صفرهای تابع، درواقع همان محل برخورد نمودار تابع با محور x می‌باشند.

ج) تعداد تابع‌هایی که از مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ به مجموعه $B = \{m, n\}$ می‌توان نوشت، عبارت است از:

د) حاصل عبارت $[2 - \pi]$ برابر با است.

$$\approx [-1, 14]$$

۲- درستی یا نادرستی هر کدام از عبارت‌های زیر را تعیین کنید. (۱ نمره)

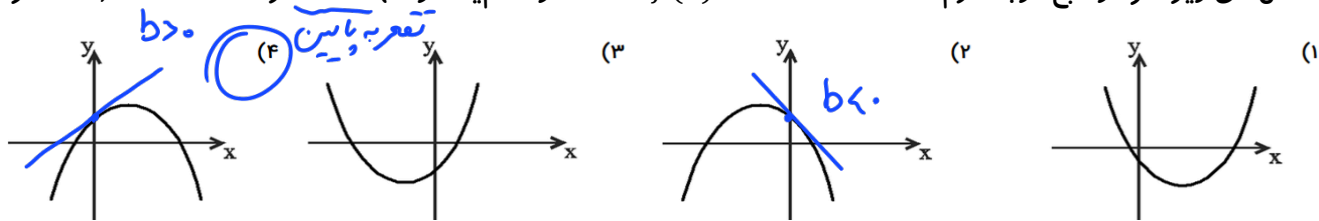
الف) به کمک روش هندسی حل معادلات همواره می‌توان مقدار دقیق همه ریشه‌ها را پیدا کرد.

ب) اگر دامنه و برد دو تابع برابر باشد، آن دو تابع با هم برابرند.

ج) معادله $x = y^2 - 3$ بیانگر یک تابع می‌باشد.

ب) شرط اینکه که یک تابع وارون‌پذیر باشد، آن است که یک به یک باشد.

۳- شکل‌های زیر نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند. در کدام یک از آنها $a < 0$ و $b > 0$ است؟ (۵/۰ نمره)



۴- اگر نقطه $A(2, 3)$ راس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $3x - 4y = 9$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟ (۵/۰ نمره)

الف) ۷ ب) ۹ ج) ۲۵ د) ۱۶ $a = \frac{|3x_1 - 4y_1 - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$ $S = a^2 = 9$

۵- مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید. (۱ نمره)

$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$ $q = 2$ $S_{10} = a_1 \times \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = \frac{1}{8} \times \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = \frac{1023}{8}$

عامل $(x-2)$

۶- اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع $p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ باشد، سایر صفرهای تابع را بیابید. (۱/۵ نمره)

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ - (x^3 + 2x^2) \\ \hline -3x^2 - 4x + 4 \\ + (3x^2 + 6x) \\ \hline 2x + 4 \\ - (2x + 4) \\ \hline 0 \end{array} \Rightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x^2 + x - 2) = 0$$

خورد سوال داده: $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x+2)(x-1) = 0$

$x = 1$
 $x = -2$

۷- الف) معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش $2 + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ باشد. (۰/۷۵ نمره)

$$S = x_1 + x_2 = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

ب) مثلث ABC به راس‌های $A(-1, 7)$ و $B(-6, -2)$ و $C(3, 3)$ را در نظر بگیرید. ابتدا اندازه تمام اضلاع آن را محاسبه نمایید، سپس نوع مثلث را مشخص نمایید. (۱ نمره)

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-1+6)^2 + (7+2)^2} = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{104}$$

$$AC = \sqrt{(-1-3)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}$$

$$BC = \sqrt{(-6-3)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{81 + 25} = \sqrt{104}$$

$AB = BC \rightarrow$ متساوی الساقین

۸- دو معادله از معادلات زیر را به دلخواه حل کنید. (به روش جبری) (۲ نمره)

$$(x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1) - 2 = 0$$

$$\left(\frac{6}{x} = 2 + \frac{x-3}{x+1}\right) x(x+1) \Rightarrow 4(x+1) = 2x(x+1) + x(x-2) \Rightarrow 4x+4 = 2x^2+2x+x^2-2x$$

$$(2\sqrt{x})^2 = (\sqrt{3x+4})^2 \Rightarrow 4x = 3x+4 \Rightarrow x = 4$$

$$|x-2| = 1 \rightarrow \begin{cases} |x-2|=1 \rightarrow |x|=3 \rightarrow x = \pm 3 \\ |x-2|=-1 \rightarrow |x|=1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow 3x^2 - 7x - 4 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4(3)(-4) = 121$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm 11}{6}$$

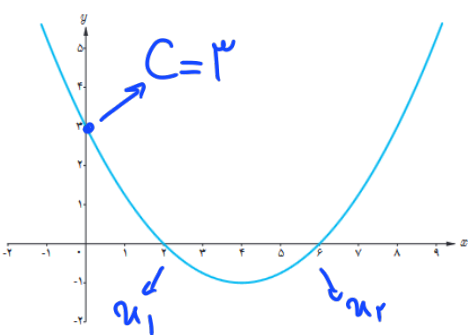
$x = 3$
 $x = -\frac{2}{3}$

$$* x^2 - 1 = t \rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \rightarrow (t+2)(t-1) = 0$$

$t = -2 \rightarrow x^2 - 1 = -2 \rightarrow x^2 = -1$ (خارج)

$t = 1 \rightarrow x^2 - 1 = 1 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

۹- اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد، ضابطه سهمی را مشخص کنید. (۱/۵ نمره)



$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = P = \frac{c}{a} \\ 2 \cdot 4 = \frac{3}{a} \\ \rightarrow a = \frac{1}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = S = -\frac{b}{a} \\ 2 + 4 = -\frac{b}{\frac{1}{8}} \\ \rightarrow b = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}x^2 - 2x + 3$$

۱۰- در هر مورد مشخص نمایید کدام جفت تابع با هم مساوی هستند. (با ذکر توضیح) (۱/۵ نمره)

$f(x) = \sqrt{x^2}$ و $g(x) = |x|$ $D_f = D_g \checkmark$ برابرند
 $D_f = \mathbb{R}$ $D_g = \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = g(x) \checkmark$
 $h(x) = x^2$ و $t(x) = x|x|$ $D_h = D_t \checkmark$ برابر نیستند
 $D_h = \mathbb{R}$ $D_t = \mathbb{R}$ $h(x) \neq t(x) \times$ $\begin{cases} h(-1) = 1 \\ t(-1) = -1 \end{cases}$ مثلاً
 $p(x) = \frac{x}{x}$ و $q(x) = 1$ $D_p \neq D_q \times$ برابر نیستند
 $D_p = \mathbb{R} - \{0\}$ $D_q = \mathbb{R}$

۱۱- دامنه توابع زیر را بدست آورید. (۱/۵ نمره)

$$\frac{x-1}{x^2-25} = 0 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{\pm 5\}$$

$$\sqrt{3x-6} \quad 3x-6 \geq 0 \rightarrow 3x \geq 6 \rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D = [2, +\infty)$$

$$\frac{2x+3}{x^2+x-12} = 0 \rightarrow (x+4)(x-3) = 0 \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{3, -4\}$$

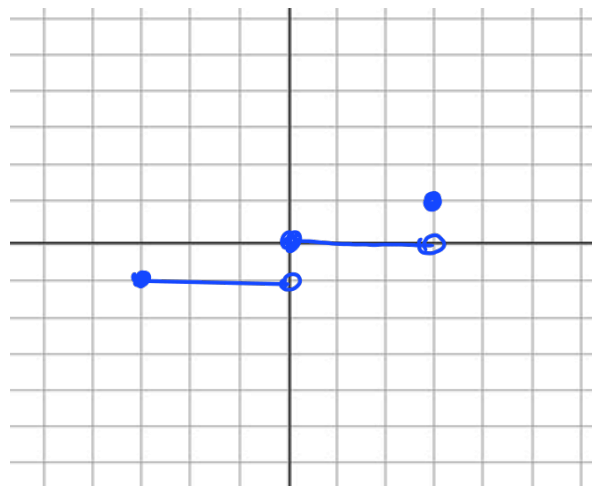
۱۲- ضابطه تابع زیر را با توجه به دامنه داده شده $[-3, 3]$ بازه بندی کنید. سپس نمودار آنرا را رسم کنید. (۱/۵ نمره)

$$f(x) = \left\lfloor \frac{1}{3}x \right\rfloor \quad -3 \leq x \leq 3 \quad \frac{x}{3} - 1 \leq \frac{1}{3}x \leq 1$$

$$-3 \leq x < 0 \quad \frac{x}{3} - 1 \leq \frac{1}{3}x < 0 \rightarrow \left\lfloor \frac{1}{3}x \right\rfloor = -1$$

$$0 \leq x < 3 \quad 0 \leq \frac{1}{3}x < 1 \rightarrow \left\lfloor \frac{1}{3}x \right\rfloor = 0$$

$$x = 3 \quad \frac{1}{3}x = 1 \rightarrow \left\lfloor \frac{1}{3}x \right\rfloor = 1$$



۱۳- تابع $g(x) = x^2 - 2x + 3$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ای از آن را که می‌تواند یک به یک باشد، تعیین کرده سپس وارون آن

را بیابید. (۱/۵ نمره)

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times 1} = 1 \quad D = [1, +\infty)$$

$$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{y-2} \Rightarrow |x-1| = \sqrt{y-2}$$

$$\xrightarrow{x > 1} x-1 = \sqrt{y-2} \rightarrow x = \sqrt{y-2} + 1 \Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y-2} + 1$$

۱۴- اگر $f(x) = 4x$ و $g(x) = 2-x$ باشد، توابع $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به همراه دامنه آن‌ها به دست آورید. (۱ نمره)

$$(f-g)(x) = 4x - (2-x) = 5x - 2 \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{4x}{2-x} \quad D_{\left(\frac{f}{g}\right)} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

$2-x=0 \rightarrow x=2$

۱۵- اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 + 3$ باشد، دامنه و ضابطه تابع $g \circ f$ را به دست آورید. سپس $g \circ f(1.0)$ را محاسبه

نمایید. (۱/۲۵ نمره)

$$(g \circ f)(x) = g(f) = f^2 + 3 = x-1 + 3 = x+2$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f \in D_g\} = \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty)$$

$$g \circ f(1.0) = 1.0 + 2 = 1.2$$

..... شماره ورقه به عدد:

نام و نام خانوادگی تجدید نظر کننده:

نام و نام خانوادگی مصمم:

..... شماره ورقه به حرف:

محل امضا

محل امضا